

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
<b>!!! μόνον άρτιοι !!!</b>			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ  
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**  
**ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.**  
**ΕΝΔΟ-ΕΞΑΜΗΝΙΑΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗ**  
**30 ΜΑΙΟΥ 2017**

**1.** Εξετάστε αν ισχύει καθένα από τα ακόλουθα. Αν ισχύει, δώστε **πλήρη απόδειξη**. Αν δεν ισχύει, δώστε κατάλληλο **αντιπαράδειγμα**.

- (i) **(5%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ομοιόμορφα συνεχής**, τότε η παράγωγος της **υπάρχει** και είναι **φραγμένη**.
- (ii) **(5%)** Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε **ανοικτό** διάστημα και είναι **συνεχής**, τότε σίγουρα **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- (iii) **(5%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ολοκληρώσιμη**, τότε είναι υποχρεωτικά **ομοιόμορφα συνεχής**.
- (iv) **(5%)** Αν μια συνάρτηση είναι **ολοκληρώσιμη**, τότε **όλα** τα κάτω αθροίσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν είναι μεταξύ τους **ίσα**.

**2. (20%)** Δείξτε ότι, αν οι συναρτήσεις  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η συνάρτηση  $f + g$  είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

**3. (20%)** Ας είναι  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση και  $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση με τύπο

$$G(x) = \int_0^x f(u)(x - u)du, \quad x \in [0, +\infty) .$$

Δείξτε ότι

$$G(x) = \int_0^x \left( \int_0^u f(t)dt \right) du, \quad x \in [0, +\infty) .$$

**4. (20%)** Ας είναι  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με  $f(0) = 0$  και  $0 < f'(x) \leq 1$ , για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ . Δείξτε ότι

$$\int_0^x f^3(t)dt \leq \left( \int_0^x f(t)dt \right)^2, \quad x \in [0, +\infty) .$$

**5. (20%)** Βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $p$  για τους οποίους συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} .$$